

【作者按： 这是去掉农业部门的核心边缘模型， 这种模型更容易扩展， 异质性企业理论和量化空间模型均没有农业部门， 但也会失去一些特征， 下面是作者推导的结果， 请指正】

## 6.3 核心边缘模型

### 6.3.1 建模环境

一个经济体包括 2 个东部与西部区位， 1 个工业部门。工业部门仅使用一种生产要素劳动力进行生产， 生产报酬递增。东部地区工业部门劳动力比重 $\lambda$ ， 西部地区工业部门劳动力比重 $(1 - \lambda)$ ， 两个地区的工人可以跨区域无成本流动。

东部地区工业部门的工资为 $w_1$ ， 西部地区工业部门的工资为 $w_2$ ， 工人流动取决于两个地区的实际工资的差距即 $(V_1 - V_2)$ ， 劳动力的流动方程为：

$$\frac{d\lambda}{dt} = \lambda(1 - \lambda)(V_1 - V_2)$$

当然， 要记住劳动者也是消费者， 这是几乎所有模型中都是隐含的假设。

### 6.3.2 消费者行为

典型消费者的效用函数为：

$$U = \left( \sum_{i=1}^N q_i^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

其中  $i=1,2,\dots,N$  是工业品的种类。

$$\text{约束条件为： } \sum_{i=1}^N p_i q_i = Y$$

构建拉格朗日方程求解这个规划问题， 可以得到：

$$\frac{p_i}{p_j} = \frac{q_i^{\frac{-1}{\sigma}}}{q_j^{\frac{-1}{\sigma}}}$$

消费者对两种工业品消费等于其价格之比。

上式子可以变形为

$$q_i = q_j \left( \frac{p_j}{p_i} \right)^\sigma$$

又因为  $\sum_{i=1}^N p_i q_i = Y$

进一步变形为：

$$q_j = p_j^{-\sigma} P^{\sigma-1} Y$$

其中：

$$P \equiv \left( \sum_{i=1}^N p_i^{1-\sigma} \right)^{1/1-\sigma}$$

就是工业品的价格指数。消费第  $j$  种数量与其价格，工业品价格指数和工业品支出有关。

### 6.3.3 生产者行为

#### 1. 要素投入

消费者是同质的，厂商也是同质的，所有的产商都有相同的生产技术。产品的生产包括固定成本和边际成本两部分，因此平均成本随着产量的增加而减少，产商仅使用一种生产要素劳动进行生产，对劳动力（工人）的需求为：

$$l = F + cq$$

其中  $l$  是劳动的需求量， $F$  为固定成本， $q$  为产量， $c$  为边际成本

#### 2. 企业定价

产商的利润函数为：

$$\pi = pq - lw = pq - wF - wcq$$

其中  $w$  为工资。

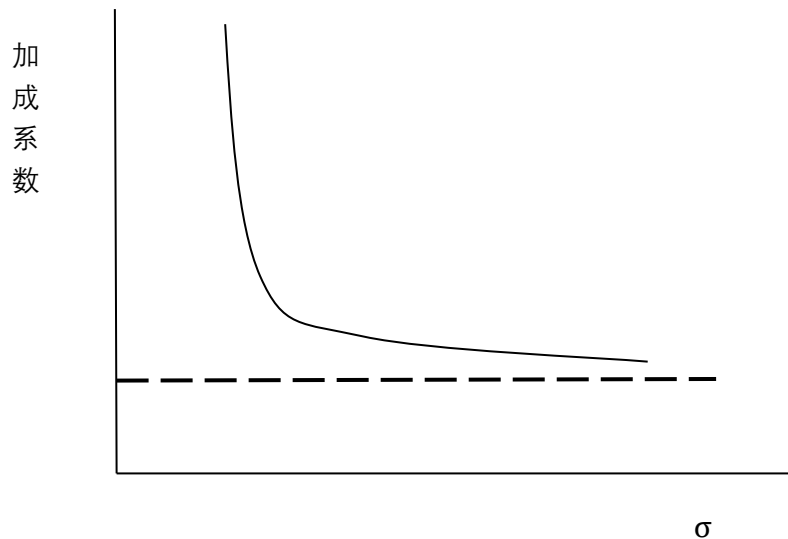
利润最大化之一阶条件为

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi}{\partial q} &= p + \frac{dp}{dq} q - wc \\ &= p(1 + \frac{dp}{dq} \frac{q}{p}) - wc = p(1 - \frac{1}{\epsilon}) - wc = 0\end{aligned}$$

其中  $\epsilon = -\frac{dq}{dp} \frac{p}{q}$ , 为产品的价格弹性, 当产品的数量很多时, 产品的价格弹性等于替代弹性, 即  $\epsilon = \sigma$ , 从而:

$$p = \frac{wc}{1 - \frac{1}{\sigma}} = \frac{\sigma}{\sigma - 1} wc = \frac{w}{\rho} c$$

企业的最优定价策略是成本加成定价 (markup ratio), 加成系数为  $\frac{\sigma}{\sigma - 1}$ , 即在产品成本之上加上某一系数, 而不是在完全竞争条件下等于产品成本。



### 3. 厂商自由进出

由于厂商自由进入与退出, 均衡时每个厂商的利润为 0, 即

$$\pi = \frac{\sigma}{\sigma - 1} wcq - w(F + cq) = 0$$

整理可以得出企业的产量是:

$$q = \frac{(\sigma - 1)F}{c}$$

产量与固定成本、边际成本和产品的替代弹性有关，不管厂商的数量多少，厂商的规模都相等。

厂商雇佣的劳动力的数量相应为：

$$l = F + cq = F + c \frac{(\sigma-1)F}{c} = F\sigma,$$

劳动力的数量与固定成本和产品的替代性有关。这时候厂商的数量为：

$$n = \frac{L}{l} = \frac{L}{F\sigma}$$

其中  $L$  是总的劳动供给量。厂商的数量与总劳动供给量、固定成本和产品间的替代性有关，劳动力数量多，厂商的数量也多；固定投入小，开办企业的门槛小，厂商的数量就会增加，产品之间的替代弹性小时，厂商的数量会增加，因为消费者需要更多的产商来生产产品。

### 6.3.4 价格指数与对工业品需求

#### 1. 价格指数

东部的消费者消费  $N$  种产品，其中  $n_1$  种为东部生产， $n_2$  种是西部地区生产， $N = n_1 + n_2$ ，东部地区产品价格为  $p_1$ ，西部地区产品价格为  $p_2$ 。则东部地区价格指数为

$$P_1 \equiv \left( \sum_{i=1}^N p_i^{1-\sigma} \right)^{1/1-\sigma} = (n_1 p_1^{1-\sigma} + n_2 (p_2 \tau_{12})^{1-\sigma})^{1/1-\sigma}$$

相应的西部地区的价格指数为：

$$P_2 \equiv \left( \sum_{i=1}^N p_i^{1-\sigma} \right)^{1/1-\sigma} = (n_2 p_2^{1-\sigma} + n_1 (p_1 \tau_{21})^{1-\sigma})^{1/1-\sigma}$$

#### 2. 对工业品需求

东部地区的工业品需求来自于两个地区，一是本地生产的产品，一是从西部运输而来的产品。则

$q_{11} = Y_1 p_1^{-\sigma} P_1^{\sigma-1}$ ，如果在东部地区生产。 $q_{11}$ 表示东部生产，东部消费；

$q_{21} = Y_1 (p_2 \tau_{21})^{-\sigma} P_1^{\sigma-1}$ ，如果在西部地区生产，运输到东部。 $q_{12}$ 表示西部生产东部消费。

考虑运输因素，则对东部地区工业品的总需求为

$$q_1 = \tau_{12} q_{12} + q_{11} = Y_2 (p_1 \tau_{21})^{-\sigma} P_2^{\sigma-1} \tau_{12} + Y_1 p_1^{-\sigma} P_1^{\sigma-1}$$

右边的第一项 $Y_2 (p_1 \tau_{21})^{-\sigma} P_2^{\sigma-1} \tau_{12}$ 为西部地区的需求，需要从东部地区运输而来，

右边的第二项 $Y_1 p_1^{-\sigma} P_1^{\sigma-1}$ 为东部地区本身的需求量。

### 6.3.5 空间均衡

#### 1. 定义劳动力流动方程与均衡

工业部门的劳动力由于实际工资水平的差异而流动，劳动力流动带来了企业区位的迁移和产业集聚的变化。

劳动力流动的动力方程为：

$$\frac{d\lambda}{dt} = \lambda(1 - \lambda)(V_1 - V_2)$$

其中 $\lambda$ 是东部地区工业企业劳动力比重， $1-\lambda$ 则为西部地区工业企业劳动力比重， $V_1$ 为东部地区的实际工资， $V_2$ 是西部地区的实际工资。东部地区劳动力的变化其实就是企业区位的变化取决于两个地区的实际工资水平差异，迁移速度受两地产业分布的初始状态 $\lambda$ ， $1-\lambda$ 的影响，在 $\lambda=0$ 或 $1$ 的情况下就出现了的集聚均衡状态。 $\lambda$ 的变化就是产业区位的变化。

劳动力流动方程最主要的是变量是真实工资之差，即 $\Delta V = V_1 - V_2 = w_1 P_1 - w_2 P_2$ ，为求这个真实工资之差，我们要求出在东西部的名义工资 $w_1, w_2$ 及其价

格指数 $P_1, P_2$ 。

## 2. 工业品需求=工业品供给

由上面的推导可知对东部地区的工业品需求为：

$$\begin{aligned} q_1 &= Tq_{12} + q_{11} = Y_2(p_2\tau_{21})^{-\sigma}G_2^{\sigma-1}\tau_{21} + Y_1p_1^{-\sigma}P_1^{\sigma-1} = \\ &Y_2\left(\frac{\sigma}{\sigma-1}w_1cd_{21}\right)^{-\sigma}\tau_{21}P_2^{\sigma-1} + Y_1\left(\frac{\sigma}{\sigma-1}w_1c\right)^{-\sigma}P_1^{\sigma-1} = \\ &\left(\frac{\sigma c}{\sigma-1}\right)^{-\sigma}[w_1^{-\sigma}\tau_{12}^{1-\sigma}P_2^{\sigma-1}Y_2 + w_1^{-\sigma}P_1^{\sigma-1}Y_1] \end{aligned}$$

而东部地区的工业品供给为：

$$q_1 = \frac{(\sigma-1)F}{c}$$

空间均衡的条件为工业品的需求等于其供给，求解出东部地区的名义工资为：

$$w_1^{\sigma} = \frac{c}{(\sigma-1)F}\left(\frac{\sigma c}{\sigma-1}\right)^{-\sigma}(Y_2\tau_{21}^{1-\sigma}P_2^{\sigma-1} + Y_1P_1^{\sigma-1})$$

同理西部地区的名义工资为：

$$w_2^{\sigma} = \frac{c}{(\sigma-1)F}\left(\frac{\sigma c}{\sigma-1}\right)^{-\sigma}(Y_1\tau_{12}^{1-\sigma}P_1^{\sigma-1} + Y_2P_2^{\sigma-1})$$

两个地区的名义工资与运输成本 T、价格指数 P、地区收入 Y、替代弹性 $\sigma$ 等有关。

## 3. 价格指数

我们对上文的价格指数进行适当变形，得：

$$\begin{aligned} P_1 &= (n_1p_1^{1-\sigma} + n_2(p_2\tau_{21})^{1-\sigma})^{\frac{1}{1-\sigma}} \\ &= \left[ \frac{\lambda}{F\sigma} \left(\frac{\sigma}{\sigma-1}w_1c\right)^{1-\sigma} + \frac{(1-\lambda)}{F\sigma} \left(\frac{\sigma}{\sigma-1}w_2c\tau_{21}\right)^{1-\sigma} \right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \\ &= \left\{ \frac{1}{F\sigma} \left(\frac{\sigma c}{\sigma-1}\right)^{1-\sigma} [\lambda w_1^{1-\sigma} + (1-\lambda)(w_2\tau_{21})^{1-\sigma}] \right\}^{\frac{1}{1-\sigma}} \\ &= \frac{\sigma c}{\sigma-1} \left(\frac{1}{F\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}} [\lambda w_1^{1-\sigma} + (1-\lambda)(w_2\tau_{21})^{1-\sigma}]^{\frac{1}{1-\sigma}} \end{aligned}$$

同理西部地区的工业品价格指数为：

$$P_2 = \frac{\sigma c}{\sigma-1} \left(\frac{1}{F\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}} [\lambda(w_1\tau_{12})^{1-\sigma} + (1-\lambda)w_2^{1-\sigma}]^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

价格指数与运输成本  $T$ 、两个地区名义工资  $w_1$  和  $w_2$ 、劳动力分布  $\lambda$ 、替代弹性  $\sigma$  等有关

#### 4. 工业品支出

工业品支出等于其收入，即：

$$Y_1 = \lambda w_1$$

$$Y_2 = \lambda w_2$$

#### 5. 参数校准

相关变量进行标准化处理，可以选择适当的单位，使得：

$$\frac{\sigma - 1}{\sigma} = c$$

以及  $F = \frac{\mu}{\sigma}$

两个名义工资方程，两个实际工资方程组成一个非线性方程组，很难求得解析解，不过我们可以借助于计算机编程技术（如 Python/Julia 等）画出  $\lambda$  和  $\omega$  的摆动图形（*Wiggle diagram*）来。